Ogólna teoria całki
Lista 1

Zad 1. Niech (Y, Σ) będzie przestrzenią mierzalną, a $f : X \to Y$ dowolnym odwzorowaniem. Wyznaczyć najmniejszą σ-algebrę podzbiorów X, przy której f jest odwzorowaniem mierzalnym. Taką σ-algebrę nazywa się *σ-algebrą generowaną przez f* i oznacza przez $\sigma(f)$.

Zad 2. Niech (X, Σ) będzie przestrzenią mierzalną, a $f : X \to Y$ dowolnym odwzorowaniem. Wyznaczyć najmniejszą σ-algebrę podzbiorów Y, przy której f jest odwzorowaniem mierzalnym. Jak wygląda największa taka σ-algebra?

Zad 3. Wyznaczyć σ-algebrę $\sigma(f)$, jeśli

a) $f : X \to \mathbb{R}$ i $f(x) = I_A(x) - I_B(x)$, gdzie A, $B \subset X$,

b) $f : X \to \mathbb{R}$ i $f(x) = I_A(x) + I_B(x)$, gdzie A, $B \subset X$,

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f(x) = \operatorname{sgn} x$,

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $f(x) = [x]$, gdzie $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$.

Zad 4. Niech $f, g : [0, \infty) \to [0, \infty)$. Sprawdzić, czy funkcja f jest mierzalna względem $\sigma(g)$ lub g jest mierzalna względem $\sigma(f)$, jeśli

a) $f(x) = \sin(\pi x)$, $g(x) = \operatorname{sgn}(\sin(\pi x))$,

b) $f(x) = [x]$, $g(x) = [\sqrt{x}]$,

c) $f(x) = [x]$, $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{N} \\ [x+1][x] & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$,

d) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot I_{(n,n+1]}(x)$, $g(x) = \begin{cases} x(x+1) & x \in \mathbb{N} \\ [x+1]^2 & x \notin \mathbb{N} \end{cases}$.

Zad 5. Pokazać, że jeżeli funkcje f, $g : X \to \mathbb{R}$ są mierzalne, to mierzalne są zbiory

$$A = \{x \in X : f(x) < g(x)\}, \quad B = \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}, \quad C = \{x \in X : f(x) = g(x)\}.$$

Zad 6. Udowodnić, że jeżeli funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ jest mierzalna, to mierzalne są wszystkie funkcje

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} b & f(x) > b \\ f(x) & a \leq f(x) \leq b \\ a & f(x) < a \end{cases}, \qquad \text{gdzie} \quad a < b.$$

Zad 7. Wykazać, że jeżeli $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem funkcji mierzalnych $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, gdzie $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, to funkcje

$$\limsup_{n\to\infty} f_n \qquad \text{oraz} \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n$$

są funkcjami mierzalnymi.